

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA  
Anno Accademico 1999-2000**

***Angelo Cavallucci***

**RILASSAMENTO PER UNA CLASSE  
DI SISTEMI DI CONTROLLO VINCOLATI**

**27 giugno 2000**

**Tecnoprint - Bologna 2000**

**Riassunto.** Vengono esposti alcuni risultati recenti di rilassamento per certi sistemi di controllo con vincoli di stato e controllo.

**Abstract .** We present some recent relaxation results for some control systems under state and control constraints .

# RILASSAMENTO PER UNA CLASSE DI SISTEMI DI CONTROLLO VINCOLATI

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il sistema

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ q.d. su } [0, T], \\ u(t) \in U \text{ q.d. su } [0, T], \\ x(0) = x_0, \\ h_i(t, x(t), u(t)) \leq 0 \text{ q.d. su } [0, T], \text{ per } 1 \leq i \leq m, \\ g_i(t, x(t), u(t)) = 0 \text{ q.d. su } [0, T], \text{ per } 1 \leq i \leq p \end{cases}$$

con  $0 < T < \infty$ ,  $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n$  assolutamente continua,  $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$  misurabile secondo Lebesgue,  $U$  sottoinsieme chiuso dello spazio di Banach separabile  $Z$ .

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di rilassamento per il sistema (1) dovuti a [3] e [10].

Il metodo seguito in [10] consiste nella trasformazione del sistema (1), sotto opportune ipotesi, in un equivalente problema di Cauchy per una inclusione differenziale e poi applicare il classico teorema di rilassamento di Filippov-Wazewski (cfr. [1], [5]).

Per  $v \in R^n$  poniamo per definizione

$$v \leq 0 \iff v_i \leq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n$$

$$v < 0 \iff v_i < 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n$$

Se  $(X, \|\cdot\|)$  e' uno spazio normato e  $x_0 \in X$ ,  $r \geq 0$ ,  $A \subset X$ , poniamo

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$B = B_1(0)$$

$$d(x_0, A) = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|, \quad d(x_0, \emptyset) = +\infty$$

$$\bar{\text{co}}A = \text{involucro convesso chiuso di } A.$$

Facciamo le seguenti ipotesi sui dati del sistema (1)

$$[0, T] \times R^n \times Z \ni (t, x, u) \longrightarrow (f(t, x, u), h(t, x, u), g(t, x, u)) \in R^n \times R^m \times R^p$$

a)  $f(\cdot, x, u)$  e' misurabile secondo Lebesgue per ogni  $x, u$ ;

b)  $\forall r > 0, \exists k(\cdot) \in L^1(0, T), \forall (x, u), (x', u') \in B_r(0) \times U$  :

$$\|f(t, x, u) - f(t, x', u')\| \leq k(t) \| (x, u) - (x', u') \| \quad (q.d.);$$

c)  $\exists \gamma(\cdot) \in L^1(0, T) :$   $\sup_{\substack{u \in U \\ x \in R^n}} \frac{\|f(t, x, u)\|}{(1 + \|x\|)} \leq \gamma(t) \quad (q.d.);$

d) Per ogni  $(t, x) \in [0, T] \times R^n$  esistono  $r > 0, L > 0$  tali che

d - i) per ogni  $(t', x') \in B_r(t, x)$  si ha

$$\{u \in U \mid h(t', x', u) \leq r, \|g(t', x', u)\| \leq r\} = \text{compatto in } Z;$$

d - ii) per ogni  $u \in U$  e  $(t', x'), (t'', x'') \in B_r(t, x)$  si ha

$$\|(h, g)(t', x', u) - (h, g)(t'', x'', u)\| \leq L \|(t', x') - (t'', x'')\|;$$

d - iii) per ogni  $K$  limitato in  $U$  esiste  $M \geq 0$  tale che

$$\|h(t', x', u') - h(t', x', u)\| \leq M \|u' - u\|$$

per ogni  $u, u' \in K$  e per ogni  $(t', x') \in B_r(t, x)$ .

Poniamo

$$\mathcal{T}_{f,U}(0, T; x_0) = \{x(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n \mid \exists u(\cdot) \text{ tale che valgano le condiz. (1)}\}$$

e per la multifunzione

$$[0, T] \times R^n \ni (t, x) \rightarrow \Gamma(t, x) \subset R^n$$

poniamo

$$\mathcal{T}_F(0, T; x_0) = \{x(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n \mid x(\cdot) \text{ ass. cont.}, \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ q.d.}, x(0) = x_0\}$$

Poniamo anche

$$(2) \quad G(t, x) = \{u \in U \mid h(t, x, u) \leq 0, g(t, x, u) = 0\},$$

$$(3) \quad F(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in G(t, x)\} = f(t, x, G(t, x)).$$

E' chiaro che  $\mathcal{T}_{f,U}(0, T; x_0) \subset \mathcal{T}_F(0, T; x_0)$ . Nelle nostre ipotesi a)-d), per ogni  $x(\cdot) \in \mathcal{T}_F(0, T; x_0)$  la multifunzione

$$[0, T] \ni t \rightarrow \{u \in G(t, x(t)) \mid \dot{x}(t) = f(t, x(t), u)\}$$

ammette una selezione misurabile (cfr. [4], Theorem III.38) e quindi vale la seguente

**Proposizione 1.** *Sotto le ipotesi a)-d) si ha*

$$\mathcal{T}_{f,U}(0, T; x_0) = \mathcal{T}_F(0, T; x_0)$$

Ci proponiamo di provare, sotto ulteriori opportune ipotesi, che

$$\mathcal{T}_{f,U}(0, T; x_0) \text{ e' denso in } \mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0)$$

rispetto alla norma naturale dello spazio  $C(0, T; R^n)$  delle funzioni continue su  $[0, T]$  a valori in  $R^n$ .

Gli elementi  $y(\cdot) \in \mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0)$  si dicono anche *soluzioni rilassate* del sistema (1).

Per dimostrare la nostra affermazione utilizzeremo il seguente

**Teorema 1.** *Supponiamo che la multifunzione*

$$[0, T] \times R^n \ni (t, x) \longrightarrow \Gamma(t, x) \subset R^n$$

*verifichi le seguenti condizioni (q.d.)*

i) *esiste  $0 \leq \gamma(\cdot) \in L^1(0, T)$  tale che*

$$\emptyset \neq \Gamma(t, x) = \text{chiuso} \subset \gamma(t)(1 + \|x\|)B;$$

ii)  $\Gamma(\cdot, x)$  *e' misurabile (cfr. [1], [4]) per ogni  $x \in R^n$ ;*

iii) *per ogni limitato  $A \subset R^n$  esiste  $k_A(\cdot) \in L^1(0, T)$  tale che*

$$\Gamma(t, x) \subset \Gamma(t, x') + k_A(t) \|x - x'\| B \text{ per ogni } x, x' \in A.$$

*Allora si ha*

$$\overline{\mathcal{T}_\Gamma(0, T; x_0)} = \mathcal{T}_{co\Gamma}(0, T; x_0) \neq \emptyset \text{ compatto in } C(0, T; R^n).$$

Questo e' un risultato classico per la cui dimostrazione rimandiamo, per esempio, a [5], Theorem 3.1.6 e relativo Corollary, Theorem 3.1.7.

Dalle condizioni a)-d) segue (cfr. [10]) che la multifunzione  $G$  definita in (2) assume valori compatti, e' *superiormente semicontinua* (u.s.c.), ossia per ogni  $(\bar{t}, \bar{x})$  si ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (t, x) : \|(t, x) - (\bar{t}, \bar{x})\| \leq \delta \implies G(t, x) \subset G(\bar{t}, \bar{x}) + \epsilon B,$$

ha dominio  $D(G) = \{(t, x) | G(t, x) \neq \emptyset\}$  chiuso, e che la multifunzione  $F$  definita in (3) verifica la condizione ii) del Teorema 1 e anche la condizione i), esclusa eventualmente la condizione

$$F(t, x) \neq \emptyset \text{ per ogni } (t, x) \in [0, T] \times R^n.$$

Per potere applicare alla nostra  $F$  il Teorema 1 ci servono altre ipotesi sui dati del sistema (1) e i due seguenti teoremi di inversione locale.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $(Y, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach e

$$\phi : X \longrightarrow Y \text{ continua.}$$

Poniamo, seguendo [10], per  $\bar{x} \in X$

$$\phi^1(\bar{x}) = \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\phi(x_i) - \phi(\bar{x})}{h_i} \mid d(x_i, \bar{x}) \leq h_i \rightarrow 0 \right\}.$$

$\phi^1(\bar{x})$  è chiuso in  $Y$ .

Se anche  $X$  è uno spazio di Banach e  $\phi$  è differenziabile secondo Frechet in  $\bar{x}$ , si ha

$$(4) \quad \overline{\phi'(\bar{x})(B)} = \phi^1(\bar{x}).$$

Se inoltre  $X \supset K$  chiuso e  $\bar{x} \in K$ , si ha

$$(5) \quad \phi'(\bar{x})(B \cap T_K(\bar{x})) \subset (\phi|_K)^1(\bar{x}),$$

ove

$$T_K(\bar{x}) = \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - \bar{x}}{h_i} \mid K \ni x_i \rightarrow \bar{x}, 0 < h_i \rightarrow 0 \right\}$$

è il cono tangente a  $K$  in  $\bar{x}$ .

**Teorema 2.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo,  $(Y, \| \cdot \|)$  uno spazio di Banach con la norma differenziabile secondo Gateaux fuori dall'origine,

$$\phi : X \rightarrow Y \text{ continua}.$$

Siano  $\bar{x} \in X, r > 0, \delta > 0$  tali che

$$\delta B \subset \bigcap_{d(x, \bar{x}) \leq 2r} \bar{c} \phi^1(x).$$

Allora si ha per ogni  $x \in X$  e  $y \in Y$

$$d(x, \bar{x}) \leq r, \|y - \phi(x)\| < \delta r \implies d(x, \phi^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\delta} \| \phi(x) - y \|$$

e in particolare riesce  $\phi^{-1}(y) \neq \emptyset$ .

In [10] è provato questo teorema applicando il principio variazionale di Ekeland alla funzione

$$B_r(x) \ni x' \rightarrow \|y - \phi(x')\|$$

e al punto  $x \in B_r(x_0)$ .

**Teorema 3.** Siano  $X$  e  $Y$  spazi di Hilbert di dimensione finita, sia  $(M, d)$  uno spazio metrico e sia

$$X \times M \ni (x, m) \rightarrow \phi(x, m) \in Y$$

una funzione continua e differenziabile rispetto a  $x$  con differenziale  $D_x \phi$  continuo su tutto  $X \times M$ . Siano  $m_0 \in M, x_0 \in S \subset X, S$  chiuso tali che

$$\phi(x_0, m_0) = 0$$

e

$$(C - Q) \quad y \in Y, -D_x \phi(x_0, m_0)^* y \in N_S^L(x_0) \implies y = 0.$$

Allora esistono  $r > 0, \delta > 0$  tali che per ogni  $x \in B_r(x_0) \cap S, m \in B_r(m_0), y \in Y$  si ha

$$\|\phi(x, m) - y\| < \delta r \implies d(x, \Phi_S(y, m)) \leq \frac{1}{\delta} \|\phi(x, m) - y\|,$$

dove

$$\Phi_S(y, m) = \{s \in S \mid \phi(s, m) = y\}.$$

Il cono normale  $N_S^L(x)$  e' definito dalle seguenti formule, per  $x \in S$ ,

$$N_S^P(x) = \{v \in X \mid \limsup_{S \ni x' \rightarrow x} \frac{\langle v, x' - x \rangle}{\|x' - x\|^2} < \infty\},$$

$$N_S^L(x) = \{\lim_{i \rightarrow \infty} v_i \mid v_i \in N_S^L(x_i), S \ni x_i \rightarrow x\}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [6], Theorem 3.4 e Theorem 3.1.

I teoremi 4 e 5 che seguono permettono di applicare il Teorema 1 al nostro sistema (1).

Poniamo

$$p = (t, x) \in [0, T] \times R^n = P,$$

$$I(p, u) = \{i \mid 1 \leq i \leq m, h_i(p, u) = 0\},$$

$$I'(p, u) = \{i \mid 1 \leq i \leq m, h_i(p, u) < 0\},$$

$$h_{I(p, u)} = [h_i]_{i \in I(p, u)}$$

e consideriamo la seguente condizione di tipo Mangasarian-Fromovitz

$$(M - F) \quad \begin{cases} \text{esistono } D_u h, D_u g \text{ continue su } P \times Z; \\ \forall u \in G(p) : D_u g(p, u) \text{ e' surgettiva,} \\ \text{se } I(p, u) \neq \emptyset, \text{ per ogni } u \in G(p) \text{ esiste } v \in Z \text{ tale che} \\ D_z h_{I(p, u)}(p, z)|_{z=u} v < 0, \quad D_u g(p, u) v = 0 \end{cases}$$

**Teorema 4.** Supponiamo verificate le condizioni a)-d) con  $U=Z$  e la condizione (M-F). Supponiamo inoltre  $G(p_1) \neq \emptyset$  per qualche  $p_1 \in P$ .

Allora  $G$  e' localmente lipschitziana e riesce  $G(p) \neq \emptyset$  per ogni  $p \in P$ .

Questo e' uno dei risultati principali di [10].

Abbiamo gia' osservato che  $G$  e' u.s.c. a valori compatti e con grafico chiuso e che  $\text{Dom}(G) = \{p \in P \mid G(p) \neq \emptyset\}$  e' chiuso. Dalla locale lipschitzianita' di  $G$  in  $P$  seguira' che  $\text{Dom}(G)$  e' aperto in  $P$  e pertanto si avra'  $\text{Dom}(G) = P$ .

Per provare che  $G$  e' localmente lipschitziana in  $\bar{p}$  ragioniamo per assurdo. Dunque affermiamo che esistono le successioni  $p'_n, p''_n \in P$  tali che per  $n \geq 1$

$$\|p'_n - \bar{p}\| \leq \frac{1}{n}, \|p''_n - \bar{p}\| \leq \frac{1}{n},$$

$$G(p'_n) \not\subset G(p''_n) + n \| p'_n - p''_n \| B$$

e quindi esiste  $u'_n$  tale che per ogni  $n$

$$u'_n \in G(p'_n), \quad d(u'_n, G(p''_n)) > n \| p'_n - p''_n \|.$$

Per ogni  $\sigma > 0$  si ha, poichè  $G$  è u.s.c. in  $\bar{p}$ ,

$$u'_n \in G(p'_n) \subset G(\bar{p}) + \sigma B \text{ per } n \geq n_\sigma$$

e  $G(\bar{p})$  è compatto. Ne segue che  $\{u'_n | n \geq 1\}$  è relativamente compatto e quindi possiamo supporre (eventualmente per una sottosuccessione)

$$u'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u} \in G(\bar{p}).$$

Supponiamo  $I = I(\bar{p}, \bar{u}) \neq \emptyset$ . Dalla condizione (M-F) in  $(\bar{p}, \bar{u})$  segue che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$D_{u, \alpha} \psi(\bar{p}, \bar{u}, \alpha)(B^+) \supset 2\delta B,$$

ove

$$\psi(p, u, \alpha) = (h_I(p, u) + \alpha, g(p, u)), \quad \alpha \in R^I,$$

$$B^+ = \{(u, \alpha) \in Z \times R^I | \|u\|^2 + \|\alpha\|^2 \leq 1, \alpha \geq 0\}$$

e  $B$  rappresenta la sfera unita' di  $R^I \times R^p$ :

Per la continuità di  $D_{u, \alpha} \psi$ , esiste  $r > 0$  tale che

$$\|u - \bar{u}\| \leq 2r, \|p - \bar{p}\| \leq 2r, \alpha \in R^I \implies$$

$$D_{u, \alpha} \psi(p, u, \alpha)(B^+) \supset \delta B.$$

L'insieme  $X = Z \times [0, +\infty[^I$  è convesso e chiuso in  $Z \times R^I$  e si ha per ogni  $(u, \alpha) \in X$  (cfr. [2], [5])

$$T_X(u, \alpha) = Z \times \prod_{\substack{i \in I \\ \alpha_i = 0}} [0, +\infty[ \times \prod_{\substack{i \in I \\ \alpha_i > 0}} R \supset Z \times [0, +\infty[^I,$$

$$B \cap T_X(u, \alpha) \supset B^+,$$

e quindi, per la (5),

$$(\psi(p, \cdot, \cdot)|_X)^1(u, \alpha) \supset D_{u, \alpha} \psi(p, u, \alpha)(B \cap T_X(u, \alpha)) \supset D_{u, \alpha} \psi(p, u, \alpha)(B^+) \supset \delta B$$

per ogni  $p, u, \alpha \geq 0$  tali che  $\|u - \bar{u}\| \leq 2r, \|p - \bar{p}\| \leq 2r$ .

Supponiamo che valga anche la condizione d-ii) in  $\bar{p}$  con il presente  $r$ .

Ora possiamo applicare il Teorema 2 alla funzione

$$X \ni (u, \alpha) \longrightarrow \phi_n(u, \alpha) = \psi(p''_n, u, \alpha)$$

e al punto  $\bar{x} = (\bar{u}, 0)$ .

Si ha per  $n \geq \bar{n}$

$$\|(u'_n, 0) - (\bar{u}, 0)\| \leq r,$$



$$\begin{aligned} & \| \phi_n(u'_n, 0) - (h_I(p'_n, u'_n), 0) \|^2 = \\ & \| h_I(p''_n, u'_n) - h_I(p'_n, u'_n) \|^2 + \| g(p''_n, u'_n) - g(p'_n, u'_n) \|^2 \leq \\ & L^2 \| p''_n - p'_n \|^2 < \delta^2 r^2, \end{aligned}$$

e dalla compattezza di  $G(\bar{p})$  segue che esistono  $\tilde{u}_n \in U$ ,  $0 \leq \tilde{\alpha}_n \in R^I$  tali che

$$\| (u'_n, 0) - (\tilde{u}_n, \tilde{\alpha}_n) \| = d((u'_n, 0), \phi_n^{-1}(h_I(p'_n, u'_n), 0)) \leq$$

$$\frac{L}{\delta} \| p''_n - p'_n \|,$$

$$\phi(\tilde{u}_n, \tilde{\alpha}_n) = (h_I(p'_n, u'_n), 0).$$

Si ha anche, per  $n \geq \bar{n}$ ,

$$h_I(p''_n, \tilde{u}_n) = -\tilde{\alpha}_n + h_I(p'_n, u'_n) \leq 0$$

$$g(p''_n, \tilde{u}_n) = 0,$$

$$\| u'_n - \tilde{u}_n \| \leq L \| p''_n - p'_n \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\tilde{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u},$$

$$h_i(p''_n, \tilde{u}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_i(\bar{p}, \bar{u}) < 0 \text{ per } i \in I'$$

e quindi si può supporre che riesca anche

$$h_i(p''_n, \tilde{u}_n) < 0 \text{ per } i \in I', n \geq \bar{n}.$$

Da tutto questo segue

$$\tilde{u}_n \in G(p''_n),$$

$$n \| p'_n - p''_n \| < d(u'_n, G(p''_n)) \leq \| u'_n - \tilde{u}_n \| \leq \frac{L}{\delta} \| p''_n - p'_n \|$$

e di qui l'assurdo

$$\| p''_n - p'_n \| > 0, \quad n < \frac{L}{\delta} \text{ per } n \geq \bar{n}.$$

In modo simile si tratta il caso di  $I(\bar{p}, \bar{u}) = \emptyset$  e si conclude così la dimostrazione.

**Teorema 5.** Supponiamo verificate le condizioni a)-d) con  $Z = R^\nu$  e la seguente condizione

$$(M' - F'), \quad \begin{cases} \text{esistono } D_u h, D_u g \text{ continue su } P \times R^\nu, \\ \forall u \in G(p) : D_u g(p, u)(C_U(u)) = R^p, \\ \text{se } I(p, u) \neq \emptyset, \text{ per ogni } u \in G(p) \text{ esiste } v \in C_U(u) \text{ tale che} \\ D_z h_{I(p, u)}(p, z)|_{z=u} v < 0, \quad D_u g(p, u)v = 0 \end{cases}$$

ove  $C_U(u)$  rappresenta il cono tangente a  $U$  in  $u$  secondo Clarke (cfr [5]). Supponiamo inoltre  $G(p_1) \neq \emptyset$  per qualche  $p_1 \in P$ .

Allora  $G$  e' localmente lipschitziana e riesce  $G(p) \neq \emptyset$  per ogni  $p \in P$ .

La dimostrazione contenuta in [10] si fonda sul Teorema 2. Qui indichiamo una dimostrazione che utilizza il Teorema 3.

Procediamo come nella dimostrazione del Teorema 4, con gli stessi simboli, fino alla determinazione delle successioni

$$N \ni n \longrightarrow p'_n, p''_n, u'_n$$

tali che

$$\|p'_n - \bar{p}\| \leq \frac{1}{n}, \|p''_n - \bar{p}\| \leq \frac{1}{n}, u'_n \in G(p'_n)$$

$$d(u'_n, G(p''_n)) > n \|p'_n - p''_n\|, u'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{u} \in G(\bar{p}).$$

Supponiamo  $I = I(\bar{p}, \bar{u}) \neq \emptyset$  e applichiamo la condizione (M'-F') in  $(\bar{p}, \bar{u})$ . Si ha (cfr [2], [5])

$$C_S(\bar{u}, \bar{\alpha} = 0) = C_U(\bar{u}) \times [0, +\infty[^I,$$

$$C_U(\bar{u}) = \{z \in R^\nu \mid \forall \xi \in N_U^L(\bar{u}) : \langle z, \xi \rangle \leq 0\}.$$

Verifichiamo che vale la condizione (C-Q) del Teorema 3 con

$$M = P \ni \bar{p}, X = R^\nu \times R^I \supset U \times [0, +\infty[^I = S \ni (\bar{u}, 0),$$

e

$$\phi(p, (u, \alpha)) = \psi(p, u, \alpha) = (h_I(p, u)) + \alpha, g(p, u)) \in R^I \times R^p = Y.$$

Siano

$$y = (y', y''), y' = [y'_i]_{i \in I}, y'' = [y''_i]_{1 \leq i \leq p}, \xi \in N_S^L(\bar{u}, 0)$$

tali che

$$0 = \xi + D_{u, \alpha} \phi(\bar{p}, (\bar{u}, 0))^* y.$$

Per ogni  $\zeta = (z, \theta) \in C_U(\bar{u}) \times [0, +\infty[^I = C_S(\bar{u}, 0)$  si ha

$$0 = \langle \xi, (z, \theta) \rangle + \sum_{i \in I} y'_i [D_u h_i(\bar{p}, \bar{u})z + \theta_i] + \sum_{i=1}^p y''_i D_u g_i(\bar{p}, \bar{u})z,$$

$$\langle \xi, (z, \theta) \rangle \leq 0.$$

Con la scelta  $z = 0$  e

$$\theta = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

$i$

si ottiene  $y'_i \geq 0$  per  $i \in I$ . Segue da (M'-F') che esiste  $\hat{z} \in C_U(\bar{u})$  tale che

$$D_u h_i(\bar{p}, \bar{u})\hat{z} < 0 \text{ per } i \in I, \quad D_u g_i(\bar{p}, \bar{u}) = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq p$$

e con la scelta  $\zeta = (\hat{z}, 0)$  si ottiene  $y'_i = 0$  per  $i \in I$ . Sempre da (M'-F') segue che esiste  $z_y \in C_U(\bar{u})$  tale che

$$D_u g_i(\bar{p}, \bar{u})z_y = -y''_i \text{ per } 1 \leq i \leq p$$

e con la scelta  $\zeta = (z_y, 0)$  si ottiene  $y''_i = 0$  per  $1 \leq i \leq p$

Ora possiamo applicare il Teorema 3 e ottenere due costanti  $r > 0, \delta > 0$  tali che da

$$u \in U, \alpha \in [0, +\infty]^I, p \in P, y = (y', y'') \in Y,$$

$$\| (u, \alpha) - (\bar{u}, 0) \| \leq r, \| p - \bar{p} \| \leq r,$$

$$\| \psi(p, u, \alpha) - y \| < \delta r$$

segue

$$d((u, \alpha), \Phi_S(p, y)) \leq \frac{1}{\delta} \| \psi(p, u, \alpha) - y \|.$$

Se poniamo  $u = u'_n, \alpha = 0, p = p'_n, y = \psi(p'_n, u'_n, 0)$  possiamo procedere come nella dimostrazione del Teorema 4 e arrivare di nuovo a un assurdo.

Dai teoremi 4 e 5 e dalla Proposizione 1 segue il

**Teorema 6.** *Supponiamo verificate le ipotesi del Teorema 4 oppure le ipotesi del Teorema 5. Allora si ha (chiusura in  $C(0, T; R^n)$ )*

$$\overline{\mathcal{T}_{f,U}(0, T; x_0)} = \mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0) \neq \emptyset \text{ compatto in } C(0, T; R^n).$$

Consideriamo ora lo spazio

$$C(U) = \{ \phi : U \longrightarrow R \mid \phi \text{ continua} \},$$

con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di  $U$ , il suo duale  $C(U)^*$  con la topologia della convergenza debole indotta da  $C(U)$ , e il sottospazio  $\mathcal{M}(U)$  di  $C(U)^*$  costituito dalle misure di probabilit  su  $U$ .

Poniamo, seguendo [3] e [10],

$$\hat{U}(0, T) = L^\infty(0, T; \mathcal{M}(U)),$$

$$\hat{U}_{h,g}(0, T) = \{ \mu \in \hat{U}(0, T) \mid \text{per quasi ogni } t \text{ si ha}$$

$$\mu(t, \{ u \in U \mid h_i(t, x(t), u) > 0 \}) = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq m,$$

$$\mu(t, \{ u \in U \mid \| g(t, x(t), u) \| > 0 \}) = 0 \},$$

essendo  $x(\cdot)$  continua tale che

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ds \int_U f(s, x(s), u) \mu(s, du) \text{ per } 0 \leq t \leq T.$$

Una tale funzione  $x(\cdot)$  e' denominata in [3], in presenza del solo vincolo  $h$ , e successivamente anche in [10] *curva generalizzata* del sistema (1) corrispondente al controllo rilassato  $\mu \in \hat{U}_{h,g}(0, T)$ .

Si ha il seguente teorema

**Teorema 7.** *Sotto le ipotesi del Teorema 6 si ha*

$$\mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0) = \{x(\cdot) \in C(0, T; R^n) \mid x(\cdot) = \text{curva generalizzata di (1)}\}$$

Questo teorema, contenuto in [10], generalizza un precedente risultato di [3], ottenuto con tecniche assai diverse.

Sia  $x(\cdot)$  la curva generalizzata associata a  $\mu \in \hat{U}_{h,g}(0, T)$ . Allora si ha

$$|f(t, x(t), u)| \leq \gamma(t)(1 + \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|) = \gamma(t)M_0$$

e quindi  $x(\cdot)$  è assolutamente continua. La funzione

$$R^n \times [0, T] \ni (p, t) \longrightarrow \sigma(p, t) = \sup_{u \in G(t, x(t))} \langle p, f(s, x(s), u) \rangle \leq \gamma(t)M_0$$

è continua rispetto a  $p$  e sommabile rispetto a  $t$ . Si ha poi per  $p \in R^n$ ,  $0 \leq t \leq t' \leq T$

$$\begin{aligned} \langle p, x(t') - x(t) \rangle &= \int_t^{t'} \langle p, \dot{x}(s) \rangle ds = \\ &= \int_t^{t'} ds \int_{G(s, x(s))} \langle p, f(s, x(s), u) \rangle \mu(s, du) \leq \int_t^{t'} \sigma(p, s) ds \end{aligned}$$

e quindi

$$0 \leq \int_t^{t'} [\sigma(p, s) - \langle p, \dot{x}(s) \rangle] ds$$

ed esiste  $E_p \subset [0, T]$  di misura nulla (secondo Lebesgue) tale che

$$\sigma(p, t) - \langle p, \dot{x}(t) \rangle \geq 0 \text{ per } t \notin E_p.$$

Se poniamo

$$E = \bigcup_{\substack{p \in R^n \\ p \text{ razionale}}} E_p,$$

otteniamo

$$\langle p, \dot{x}(t) \rangle \geq \sigma(p, t) \text{ per } t \notin E, R^n \ni p \text{ razionale},$$

e questa disuguaglianza si estende a ogni  $p \in R^n$  per continuità. Ne segue che

$$\dot{x}(t) \in coF(t, x(t)) \text{ q.d. su } [0, T]$$

e quindi che

$$x(\cdot) \in \mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0).$$

Sia ora  $x(\cdot) \in \mathcal{T}_{coF}(0, T; x_0)$ . Allora si ha, per quasi ogni  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{x}(t) \in coF(t, x(t)),$$

$$\Lambda(t) = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n, u_0, \dots, u_n) \in R^{n+1} \times U^{n+1} \mid \lambda_i \geq 0, \sum_0^n \lambda_i = 1,$$

$$u_i \in G(t, x(t)), 0 = \dot{x}(t) - \sum_0^n \lambda_i f(t, x(t), u_i) \} \emptyset \text{ chiuso}$$

e la multifunzione  $\Lambda(\cdot)$  ammette una selezione misurabile (cfr. [4])

$$[0, T] \longrightarrow (\lambda_0(t), \dots, \lambda_n(t), u_0(t), \dots, u_n(t)) \in \Lambda(t).$$

Poniamo per  $\phi \in C(U), 0 \leq s \leq T$

$$\int_U \phi(u) \mu(s, du) = \sum_0^n \lambda_i(s) \phi(u_i(s)).$$

Allora  $\mu \in \hat{U}_{h,g}(0, T)$  e  $x(\cdot)$  e' la corrispondente curva generalizzata.

Concludiamo indicando alcuni tipi di vincoli di stato che si possono aggiungere al sistema (1) e tali che il sistema cosi' ottenuto sia ancora trattabile con i metodi visti sopra.

Il vincolo

$$\phi(\cdot, t, x(t)) = 0 \text{ per } 0 \leq t \leq T$$

aggiunto al sistema (1), per  $\phi$  almeno di classe  $C^1$  e con  $\phi(0, x_0) = 0$ , e' equivalente al seguente

$$D_t \phi(t, x(t)) + D_x \phi(t, x(t)) f(t, x(t), u(t)) = 0.$$

Il vincolo

$$x(t) \in \bar{\Omega} \text{ per } 0 \leq t \leq T$$

aggiunto al sistema (1), con  $\Omega$  aperto in  $R^n$ , non e' trattabile cosi' semplicemente. Tuttavia consideriamo la seguente condizione su  $\Omega$  e  $F$ , data da (3),

$$(6) \quad \begin{cases} \forall x_0, \exists M_0 \geq 0, \forall x(\cdot) \in \mathcal{T}_F(0, T; x_0), \exists \hat{x}(\cdot) \in \mathcal{T}_F(0, T; x_0) : \\ \hat{x}(t) \in \bar{\Omega} \text{ per } 0 \leq t \leq T, \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq M_0 \max_{0 \leq t \leq T} d(x(t), \bar{\Omega}) \end{cases}$$

e poniamo

$$\mathcal{T}_F^{\bar{\Omega}}(0, T; x_0) = \{x(\cdot) \in \mathcal{T}_F(0, T; x_0) \mid x(t) \in \bar{\Omega} \text{ per } 0 \leq t \leq T\}.$$

In [10] e' provato il seguente

**Teorema 8.** Se  $F(\cdot, \cdot)$  e' localmente lipschitziana e se vale la condizione (6), allora

$$\overline{\mathcal{T}_F^{\bar{\Omega}}(0, T; x_0)} = \mathcal{T}_{coF}^{\bar{\Omega}}(0, T; x_0) \emptyset \text{ compatto in } C(0, T; R^n).$$

Osserviamo che la lipschitzianita' di  $F(\cdot, \cdot)$ , sotto le ipotesi del Teorema 5 o del Teorema 6, segue dalla locale lipschitzianita' di  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ .

In [8], [10], [11], [12] sono trattati alcuni tipi di aperti  $\Omega$  che, insieme con  $F$ , verificano la condizione (6).

## BIBLIOGRAFIA

1. J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. J. P. Aubin, I. Ekeland. *Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1984.
3. E. N. Barron, J. Jensen, *Relaxation of constrained control systems*, SIAM J. Contr.Optim. **34** (1996), 2077-91.
4. C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathem. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
5. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
6. F. H. Clarke, *Solving equations by the decrease principle*, Centre de Recherches Mathematiques. CRM Proceedings and Lecture Notes **11** (1997), 29-39.
7. F.H. Clarke, Y.S. Ledyayev, R.S. Stern, P.R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
8. F. Forcellini, F. Rampazzo, *On nonconvex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set. Applications to dynamic programming*, Differ. Integral Equat. **12,4** (1999), 471-97.
9. H. Frankowska, *Some inverse mapping theorems*, Ann. Inst. H. Poincare'. Annal. Non Lineaire **7** (1990), 183-234.
10. H. Frankowska, F. Rampazzo, *Relaxation of control systems under state constraints*, SIAM J. Contr.Optim. **37** (1999), 1291-1309.
11. M. Motta, F. Rampazzo, *A sufficient condition for the continuity of the value function of control problems with state constraints*, NoDEA, to appear.
12. F. Rampazzo, R. B. Vinter, *A theorem on existence of neighbouring trajectories satisfying a state constraint, with applications to optimal control with state constraints*, IMA J. Mathem. Control & Information **16** (1999), 335-351.